更新日：2023年12月9日

#### The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models

|  |
| --- |
| **概要**  本文献では，AFNSモデル（Arbitrage-Free Nelson-Siegel model）を導出する．AFNSモデルは，3ファクターAffine Arbitrage-Free モデルの |

# Nelson-Siegel Term Structure Models

本章では，Dynamic Nelson Siegel モデル（以下，DNSモデル）について述べ，Nelson-Siegelモデルのファクター構造を維持しつつ，AFNSモデルを導出する．

## The Dynamic Nelson-Siegel Model

Nelson-Siegelモデルは，以下の式に基づきイールドカーブの形状を表現する．

|  |  |
| --- | --- |
| ：満期のスポットレート（単位：月）  ：水準パラメータ  ：傾きパラメータ  ：曲率パラメータ  ：規模パラメータ | （1‑1） |

これは静的な表現であるため，時間経過に伴う債券市場の推移を表現するためには動的なモデルが必要となる．そこで，Diebold and Li (2006)[1] は の係数を動的に変化させることを提案しており，その場合，Nelson-Siegelモデルのファクターは，動的に変化する水準，傾き，曲率として解釈される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | （1‑2） |

Diebold and Li (2006)[1] は，ファクター（）を自己回帰モデルとして仮定し，DNSモデルを生成する．これは状態空間モデルであり，Diebold, Rudebusch and Aruoba (2006)[2] でも指摘されているように状態変数としてイールドファクターがある．DNSモデルは非常に扱いやすく，㊥でも利用されているが，裁定機会を排除してイールドカーブを説明する必要はない．実際，Filipovi´c (1999) [4] はDNSファクターとしてどのような確率的ダイナミクス（Stochastic dynamics）を選んだとしても，Nelson-Siegelイールドカーブに内包される債券価格での裁定を排除することはできないことを示している．次節では，この理論的な課題点を改善する方法を示す．

## The Arbitrage-Free Nelson-Siegel Model

AFNSモデルは，Duffie and Kan (1996) [3] の標準的な連続時間Affine Arbitrage-Free model から始まっている．Affine拡散過程（diffusion process）を表現するために，確率空間（ただし， は一般的な条件を満たす）を定義する．状態変数は， 上で定義されたマルコフ過程とする．

|  |  |
| --- | --- |
| ：上の標準ブラウン運動  ： である有界連続関数  ： である有界連続関数  ： である有界連続関数（ボラティリティ行列）  ： である対角行列 | （1‑3） |

は以下で表現される．

表記を簡単にするために，

但し，，は有界連続関数とする．この表記を用いることで，状態変数の確率微分方程式（1‑3）は次のように書くことが出来る．

ここで，はの行目を指す．最後に，瞬間的な短期金利は状態変数のアフィン関数であると仮定する．

ただし，，は有界連続関数とする．

Duffie and Kan (1996) [3] は，このフレームワークによるゼロクーポン債価格は，状態変数の指数アフィン関数であることを示している．

ここで，とは常微分方程式（Ordinary Differential Equation：以下，ODE）の解である．

|  |  |
| --- | --- |
|  | （1‑4） |
|  | （1‑5） |

ゼロクーポン債の価格式は，ゼロイールドが以下で表現されることを意味する．

ゼロクーポン債の価格 が与えられたとき，の3ファクターAffineモデルにおいて，Nelson-Siegelモデルの表現に合わせると，

の通りであり，の常微分方程式と比較すると，以下の通りである．

この場合，ファクターはNelson-Siegelモデルと完全に一致するが，定数項の部分（yield-adjustment term） が存在しており，ここは満期のみに依存する．次の命題で示す通り，上記のODEを満たすAffine AFモデルが存在する．

* Proposition.1：  
  瞬間短期金利が，  
  ここで，状態変数は，リスク中立測度のもと以下のSDEで表現される．

ゼロクーポン債の価格は，

ただし，，，とはODEで表現される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | （1‑6） |
|  | （1‑7） |

ここで，である．ODEの解は次の通りである．

最後に，ゼロイールドは以下の通りである．

Proposition.1 で定義されたAFNSモデルの存在は，Trolle and Schwartz (2009) [5][[1]](#footnote-2) に関連する．DNSモデルに基づくフォワードカーブは，Trolle and Schwartz (2009) [5] における仮定を満たすので，3次元Arbitrage-Free HJMモデルが存在する．

Proposition.1 により確認できる点は以下の通りである．

【ポイント】

1. 状態変数は，時点によらないボラティリティ行列を持つGaussian Ornstein-Uhlenbeck過程である．
2. 瞬間短期金利は，水準・傾きファクターの和で表現され，曲率ファクターはリスク中立測度における傾きファクターの確率的時間変動の平均を指す．
3. リスク中立測度におけるAFNSモデルのダイナミクスを表現し，実測度の下でのダイナミクスは表現していない．また，実測度の下での曲率の解釈が難しいという先行研究（例えば，Diebold, Rudebusch, and Aruoba (2006)）の結果とおおむね一致している．
4. 水準ファクターは，リスク中立測度の下では，単位根過程であり，これはイールドファクターの1つ以上が実測度 の下では非定常過程に近いという経験則に一致[[2]](#footnote-3)する．
5. Proposition.1 は規模パラメータの性質に関する解釈を与える．いくつかの文献（例えば，Koopman, Mallee, and van der Wel (2010)）では，規模パラメータのダイナミクスを与えているが，AFNSモデルでは定数であり，曲率および傾きファクター係数の平均回帰率，並びに曲率係数の平均からの偏差が傾きファクターの平均に影響与える度合いとして解釈される．
6. AFNSモデルはさらに満期による項を含んでいる．この「イールド調整項」はDNSとAFNSの重要な相違点であり，次節で詳しく検討する．

## The Yield-Adjustment Term

AFNSモデルにおけるのODEsのパラメータはのみ，つまりのファクター係数とリスク中立測度の下で状態変数の平均回帰構造である．ドリフト項とボラティリティ行列はODEには現れず，むしろイールドの調整項に現れる．したがって，AFNSモデルでは，ボラティリティ行列の選択は，イールド調整項を通じて，実測度ダイナミクスとイールドカーブ関数の両方に影響を与える．一方で，DNSモデルは状態変数の実測度ダイナミクスについては無視しているので，実測度ダイナミクスはイールドカーブ関数に関係しない．

次節で述べるように，リスク中立測度の下で状態変数の平均水準を，すなわちに固定し，AFNSモデルを推計する．これは，イールド調整項が次のような形式であることを意味する．

一般的なボラティリティ行列が与えられたとき，

となり，イールド調整項は解析的に次の様に表される．

ただし，

この結果は2つの意味を持つ．第一に，AFNSモデルのゼロイールドが解析的に導かれるということは，AFNSモデルの実証的な実装を容易にする．第二に，9つのボラティリティパラメータは特定されない．実際，の6つの項だけが特定可能である，つまり，特定可能なモデル表現が最も大きいAFNSモデルの仕様は，三角形のボラティリティ行列を持つ．

後ほど，イールド調整項を定量化し，実証的パフォーマンスにどのような影響を与えるかを検証する．

## Four Specific Nelson-Siegel Models

DNSモデルとAFNSモデルは，実測度ダイナミクスについては言及していないので，実データに一致させる方法は複数ある．ここでは，既存研究に並んで2つのバージョンのDNSモデルに焦点を当て，裁定機会のない場合の効果を検証する．

独立ファクターDNSモデルでは，Diebold and Li (2006)と同様に，3つの状態変数は独立した一次自己回帰である．状態遷移方程式は以下の通り.

ここで，誤差項は以下の通りある．

Correlated-factor DNSモデルにおいて，Diebold, Rudebusch, and Aruoba (2006) [2] と同様に，状態変数は1次自己回帰ベクトルに従う．遷移方程式は以下の通りである．

ここで，誤差項は分散共分散行列に従い，は以下で表現される．

独立ファクターDNSモデル，相関ファクターDNSモデルともに，観測方程式は

|  |  |
| --- | --- |
|  | （1‑8） |

ここで，はホワイトノイズである．

対応するAFNSモデルは連続時間で定式化され，実測度下のダイナミクスとリスク中立測度下の関係は，以下で与えられる．

ただし，はリスクプレミアムを表す．実測度の下でのAffineダイナミクスを維持するために，ここではEssentially Affine構造に焦点を当てる．ここでは，リスクプレミアムは以下で表現される．

Essentially Affine構造では，実測度の下での状態変数のSDEは，Affineのままである．

|  |  |
| --- | --- |
|  | （1‑9） |

リスクプレミアムは柔軟に設定できるため，実測度の下での任意の平均回帰水準と平均回帰速度行列を自由に選択できる．つまり，Propositon.1 で述べた必要なリスク中立測度上のダイナミクスを維持したまま実測度の下で設定できる．

# Estimation and In-Sample Fit of DNS and AFNS Models

前述では，Nelson-Siegelの期間構造モデルのAffine AFクラスを導出し，それがモデル[[3]](#footnote-4)に与える制約を明示的に特徴づけてきた．ここでは，AFNSモデルの推定方法を紹介し，そのフレームワークの単純さを説明する．

ここで説明する事項は以下の通り．

≪説明事項≫

1. 状態空間/カルマンフィルタの最尤推定フレームワーク
2. 独立ファクターDNSモデルと相関ファクターのDNSモデルの推定
3. 独立ファクターDNSモデルと相関ファクターのAFNSモデルの推定と対応するDNSモデルとの比較

≪使用データ≫

* 米国の月末日次リターン
* 1987年1月から2002年12月までの16個の満期データ  
  （3, 6, 9, 12, 18, 24, 36, 48, 60, 84, 96, 108, 120, 180, 240, 360ヶ月）

データは Diebold and Li (2006)に記載されているように，非平滑化 Fama-Bliss (1987) アプローチを用いて構築

## Estimation Framework

まず，DNSモデルとAFNSモデルの状態空間を表現する．DNSモデルの場合，状態方程式は，以下の通りである．

ここで，であり，観測方程式は

|  |  |
| --- | --- |
|  | （1‑9） |

連続時間AFNSモデルにおいて，条件付き平均ベクトルと条件付き分散行列は以下の通りである．

ただし，．離散にした場合の条件付モーメントを計算し，AFNSモデルの状態方程式を得ることが出来る．

ここで，は観測時間の間隔である．AFNSモデルの観測方程式[[4]](#footnote-5)は以下の通り．

DNSモデル，AFNSモデルともに，想定される誤差構造は，以下の通りである．

ここで，行列は対角行列，行列はは独立ファクターの場合は対角行列，相関ファクターの場合は非対角行列である．AFNSモデルの場合，さらには以下の構造を持っている．

また，遷移誤差と観測誤差は初期状態にて直行と仮定する．

次に，DNSモデルとAFNSモデルの尤度関数を評価するために用いるカルマンフィルタを考える．実測度のもとで状態変数の条件なし平均と分散でフィルタを初期化[[5]](#footnote-6)する．

≪DNSモデル≫

≪AFNSモデル[[6]](#footnote-7)≫

時点に利用可能な情報をとし，モデルパラメータをとする．時点を考え，状態更新とその平均二乗誤差行列が得られたとする．予測手順は，

≪DNSモデル≫

ただし，．

≪AFNSモデル≫

ただし，．

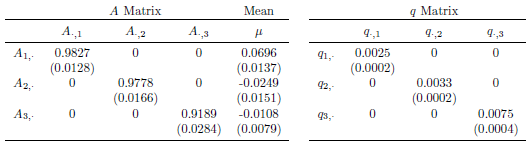
時点更新ステップでは，はに含まれる追加情報を用いることで更新される．

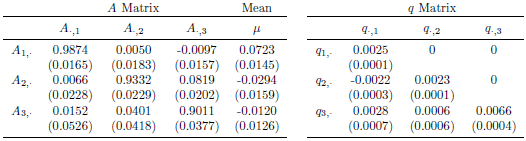
ただし，

この時点で，カルマンフィルタはガウス対数尤度を評価するために必要なすべての要素が揃っており，その予測誤差分解は次の通りである．

ここでは，観測データ数である．最尤推定法により，に関する尤度を最大にするようにパラメータを求める．このとき，推定された共分散行列から標準誤差が得られる．

ここで，は推定されたモデルパラメータを表す．





参考文献

1. Diebold, Francis X. and Canlin Li, 2006, “Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields,” Journal of Econometrics, 130, 337-364.
2. Diebold, Francis X., Glenn D. Rudebusch and S. Boragan Aruoba, 2006, “The Macroeconomy and the Yield Curve: a Dynamic Latent Factor Approach,” Journal of Econometrics, 131, 309-338.
3. Duffee, Gregory R., 1996, “Idiosyncratic Variation of Treasury Bill Yields,” Journal of Finance, 51, 527-552.
4. Duffee, Gregory R., 2002, “Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models,” Journal of Finance, 57, 405-443.
5. Filipovi´c, Damir, 1999, “A Note on the Nelson-Siegel Family,” Mathematical Finance, 9, 349-359.
6. Fisher, Mark and Christian Gilles, 1996, “Term Premia in Exponential-Affine Models of the Term Structure,” Manuscript, Board of Governors of the Federal Reserve System.
7. Trolle, Anders B. and Eduardo S. Schwartz, 2009, “A General Stochastic Volatility Model for the Pricing of Interest Rate Derivatives,” Review of Financial Studies, 22, 2007-2057.

1. 一般的な-次元のHJMモデルによるフォワードカーブのダイナミクスは，ボラティリティ関数が以下で与えられる場合，有限次元のマルコフ過程により表現されることを示した．ただし，は時点における次多項式である． [↑](#footnote-ref-2)
2. 水準ファクターにおける単位根は，であり，これは満期が十分大きい場合は無裁定ではないことを示している．したがって，満期には上限値を課すことになる．あるいは，平均回帰速度に関する行列の左上に十分小さな値を含むように調整し，Propositon.1におけるAFNSモデルと区別のないAFモデルを得ることもできる． [↑](#footnote-ref-3)
3. 詳細はDuffee (2022)[4] を参照． [↑](#footnote-ref-4)
4. 行列はDNSモデルとAFNSモデルで同一である（式（1‑8）を参照）．唯一の違いは，AFNSモデルにおけるイールド調整項を含むの追加である． [↑](#footnote-ref-5)
5. DNSモデルの場合，行列の固有値を1未満に制限することにより，AFNSモデルの場合，の各固有値を実数成分の正に制限することことにより，実測度の下で共分散行列の定常性を担保する． [↑](#footnote-ref-6)
6. Fisher and Gilles (1996) [6] にて解析解の求め方が記載されている． [↑](#footnote-ref-7)